

Институт

физики



им. Л.В.Киренского

Панковский А. А.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ  
БИРЖЕВЫХ КОТИРОВОК  
ВАЛЮТНЫХ И  
ТОВАРНЫХ РЫНКОВ  
КАК ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ  
ЧАСТИЦЫ МЕЖДУ  
ПОТЕНЦИАЛЬНЫМИ  
БАРЬЕРАМИ

Препринт 788Ф  
Красноярск, 1998

УДК 531/534  
УДК 336.763(075.8)

Поставлена задача интерполяции и экстраполяции временного ряда биржевых котировок валютных и товарных рынков на основе аналогии с движением частицы между потенциальными барьерами, которые восстанавливались по известной траектории частицы, как и обратной задаче рассеяния. В качестве примера рассмотрен ряд недельных котировок доллар/марка.

Рецензент д.ф.-м.н. Р.Г. Хлебонрос

## 1. Введение

Принято считать, что первую попытку систематического подхода к анализу ценовых графиков предпринял Чарльз Доу в статье в Wall Street Journal в начале 1890-х годов. Эта работа положила начало целому направлению работ, развившемуся в то, что сегодня называется техническим анализом. Подробные обзоры методов технического анализа можно найти в книгах Джона Мэрфи [1], Томаса Р. Демарка [2], Анны Эрлих [3] и др.

Однако, технический анализ не является математически обоснованной дисциплиной, а представляет собой скорее набор эмпирических правил, более или менее подтверждающихся на практике. Естественно, такое положение вещей не могло удовлетворить профессиональных математиков и, в последние годы, физиков, которые активно подключились к проблеме предсказания курсов акций и курсов обмена валют. Были предприняты попытки использовать достаточно хорошо опробованные в других областях методы статистического анализа, такие, как метод наибольшего правдоподобия, методы регрессионного анализа и другие методы, включая байесовские. Однако было показано, что подобные методы анализа зачастую оказываются несостоятельными применительно к анализу временных рядов, порождаемых курсами продажи акций или валюты. Это связано с тем, что такие ряды являются реализациями нестационарных процессов и обладают весьма неприятными с точки зрения традиционного анализа свойствами. Например, среднее и/или дисперсия временного ряда такого типа могут оказаться бесконечными, а спектр мощности – иметь особенность вида  $1/f$  и степенной закон спада мощности с частотой [4]. В связи с этим стали активно применяться методы, разработанные математиками в ходе развития теории стохастических систем. Пользуясь терминологией и подходами этих методов, можно сказать, что временной ряд такого класса обладает свойством самоподобия, или фрактальностью. Математические методы анализа таких временных рядов продвинулись весьма значительно, что подтверждается фактом присуждения в 1997 г. Шоулзу и Мертону нобелевской премии в области экономики за работы Блэка, Шоулза и Мертона по определению стоимости опционов акций [5, 6]. Тем не менее все еще ощущается заметный недостаток работ по оценке собственно курсов акций, товаров или валют, а не их производных. Кроме того, с точки зрения физика, особый интерес представляет возможность применить подходы, базирующиеся на «первых принципах» – фундаментальных законах природы, а не достаточно абстрактные подходы теории вероятностей.

К настоящему времени в физике разработан весьма сильный аналитический аппарат, активно развиваемый применительно к данной задаче. Например, методы нелинейной динамики и случайных процессов, как описанные в [7, 8]. Подобный подход с целью оценки корреляционных функций финансовых временных рядов применялся в [9, 10] в ряде других работ.

## 2. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается задача интерполирования и экстраполирования временных рядов биржевых котировок валют. Предполагается, что такие ряды могут быть представлены как сумма детерминированной и случайной компоненты, т.е. делается принятое в анализе данных финансовых рынков предположение (например, модель GARCH – generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [11]).

Здесь в качестве примера предпринимается попытка моделирования детерминированной составляющей ряда недельных котировок курса марки Германии по отношению к доллару США (рис. 1).



Рис. 1. Недельный график изменения курса марка/доллар. Источник – Tullett & Tokyo [12].

Выбор объекта изучения обусловлен большими объемами сделок на рынке доллар/марка, что минимизирует случайную составляющую, во многом обусловленную действиями отдельных игроков на бирже.

## 3. Построение модели

Построим модель, основанную на первых принципах – на основе аналогии с классической механикой материальной точки.

Предположим, что одновременное задание курса  $x$ , его полной производной по времени  $\dot{x}$  и некоего внешнего поля  $U = U(x, t)$  полностью описывает состояние рынка, т.е. существует функция Лагранжа

$$L = L(x, \dot{x}, U, t), \quad (1)$$

определяющая такое состояние.

В отличие от лагранжиана для механической системы, переменная  $x$  не является однородной и определена только на положительной полуоси, так как курс не может быть отрицательным или нулевым. Кроме того, следует потребовать инвариантности функции Лагранжа относительно деноминации валюты. Это требование означает, что преобразование вида

$$x \rightarrow \alpha \cdot x, \quad \dot{x} \rightarrow \alpha \cdot \dot{x}, \quad (2)$$

где  $\alpha$  – произвольный коэффициент, должно отображать лагранжиан в себя. Единственной комбинацией переменных, удовлетворяющих этому условию, является отношение  $\dot{x}/x$ . Следовательно,

$$L = L(x, \dot{x}/x, U, t). \quad (3)$$

Для дальнейшего целесообразно ввести однородную (определенную на интервале от  $-\infty$  до  $+\infty$ ) переменную

$$z = \ln x, \quad (4)$$

тогда  $\dot{z} = \dot{x}/x$ . Обратное преобразование имеет вид

$$x = e^z, \quad \dot{x} = \dot{z} \cdot e^z \quad (5)$$

Отметим, что именно такая переменная и используется аналитиками рынка валют, а именно «средне-логарифмическая цена», определяемая как

$$p = \frac{1}{2} \cdot [\ln(p_{bid}) + \ln(p_{ask})],$$

где  $p_{bid}$  и  $p_{ask}$  – соответственно цена продажи и покупки валюты.

Теперь, используя переменные  $z$  и  $\dot{z}$ , запишем лагранжиан в виде, пригодном для вывода уравнений движения

$$L = L(z, \dot{z}, U, t). \quad (6)$$

Следуя далее аналогии с механической системой, введем действие  $S$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(z, \dot{z}, U, t) dt,$$

и, требуя равенства нулю его вариации, получим уравнение Эйлера (см., например, [13])

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

В исходных переменных  $(x, \dot{x})$  уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{\dot{x}}{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

#### 4. Вывод динамических уравнений

Рассмотрим сначала простейший случай – свободное движение и определим функцию Лагранжа.

Очевидно, что в этом случае потенциал  $U$  тождественно равен нулю. Далее, функция Лагранжа не может зависеть от  $z$  и  $t$  в силу однородности этих переменных. Таким образом, уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0. \quad (9)$$

Откуда  $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \text{Const}$ . Следовательно,  $\dot{z} = C$ , где  $C$  – произвольная постоянная.

Возвращаясь к неоднородной переменной (курсу), с помощью (4) получаем:

$$\dot{x}/x = C. \quad (10)$$

Решением этого уравнения является:

$$x(t) = x(0) \cdot e^{Ct}. \quad (11)$$

Переменная  $x$  может иметь смысл цены акций или опционов, значения котировок или суммы размещенного в банке капитала. Мы видим, что выражение (6) – это известная формула приращения капитала, получаемая при условии, что начисленные проценты добавляются к сумме основного капитала (на который в свою очередь начисляются проценты). В рассматриваемом случае валютных котировок  $C$  является разницей между учетными ставками для доллара и марки.

Отметим, что для получения формулы (11) достаточно предположения о существовании однородной переменной, связанной с курсом валют, и условия инвариантности уравнения движения относительно деноминации.

Естественно предположить изотропность переменной  $z$ , что означает отсутствие предпочтительного направления изменения этой переменной. В силу этого предположения, функция Лагранжа будет зависеть только от  $\dot{z}^2$ . Определим вид этой зависимости.

Воспользуемся тем, что в однородном изотропном пространстве переменных  $(z, \dot{z})$  функция Лагранжа не должна менять свой вид при преобразовании Галилея  $\dot{z}' = \dot{z} + v$ , где  $v$  – произвольная константа, имеющая размерность скорости. Применим такое преобразование с бесконечно малой  $v$ . Разложив лагранжиан в ряд Тейлора и отбросив члены второго порядка малости по переменной  $v$ , получим

$$L(\dot{z}'^2) = L(\dot{z}^2) + 2 \cdot v \cdot \dot{z} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{z}^2}. \quad (12)$$

Так как при преобразовании Галилея не должно изменяться действие  $S$ , необходимо, чтобы второй член этого равенства являлся полной производной по времени. Это условие выполнится только в том случае, когда  $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}^2} = \text{Const}$ .

Соответственно, функция Лагранжа в рассматриваемом случае прямо пропорциональна  $\dot{z}^2$ :

$$L(\dot{z}^2) = D \cdot \dot{z}^2, \quad (13)$$

где  $D$  – произвольный постоянный множитель. Или, в переменных  $(x, \dot{x})$

$$L(x, \dot{x}) = D \cdot (\dot{x}/x)^2. \quad (14)$$

Переходя к случаю несвободного движения (потенциал  $U$  не равен нулю), можно предположить, что потенциал является возмущением лагранжиана свободного движения, и записать

$$L(\dot{z}, U, t) = D \cdot \dot{z}^2 - U(z, t). \quad (15)$$

Подставляя полученное выражение в уравнение Эйлера (7), получим

$$2 \cdot D \cdot \ddot{z} = - \frac{\partial}{\partial z} U(z, t). \quad (16)$$

Поскольку потенциал  $U$  пока не определен, а функция Лагранжа определена с точностью до произвольного множителя, то, без ограничения общности, можно положить постоянную  $D = \frac{1}{2}$ . Таким образом,

$$\ddot{z} = - \frac{\partial}{\partial z} U(z, t). \quad (17)$$

Соответственно, в переменных  $(x, \dot{x})$

$$\ddot{x} - \frac{\dot{x}^2}{x} = - x^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} U(x, t). \quad (18)$$

Последнее уравнение отличается от уравнения Ньютона в форме (17) членами, учитывающими неоднородность переменной  $x$ . Однако, если в предположении малости отклонения  $x$  относительно некоего  $x_0$  разложить переменную  $x$  в ряд Тейлора, то полученное уравнение для таких отклонений в первом приближении совпадет с уравнением (17).

#### 5. Модельный потенциал

Попытаемся теперь построить функцию потенциала и промоделировать характерные процессы, происходящие на бирже и традиционно описываемые в терминах «графического анализа» [2, 3].

Априори про потенциал ничего не известно. Вообще говоря, вид этой функции должен быть восстановлен по данным эксперимента – временному ряду биржевых котировок. Это обратная задача, которая не имеет однозначного решения за исключением частных случаев, когда потенциал обладает симметрией высокого порядка. В данном случае такого предположить нельзя, и остается только «угадать» функцию, сделав ряд общих предположений, относящихся к конкретному моделируемому процессу.

С практической точки зрения важно прогнозировать (значит, и моделировать) моменты резких смен направления движения котировок – смену тренда. В техническом анализе методам таких прогнозов уделяется особое внимание, и в ходе многих лет исследований была построена классификация смен трендов. Одним из характерных сценариев в этой классификации является так называемый «треугольник» (см. рис.1), моделированию которого и будет посвящена оставшаяся часть данной работы. В техническом анализе стороны (образующие) треугольника строятся как сходящиеся прямые линии, проведенные через максимальные значения котировок для верхней образующей и минимальные – для нижней. Наиболее важной задачей является определение момента времени и направления движения котировок при «пробивании» одной из образующих.

В силу изотропности переменной  $z$  естественно предположить осевую симметрию отдельного возмущения (потенциала). Кроме того, известно, что все методы технического анализа одинаково работают как вперед по времени, так и назад. Поэтому потребуем инвариантности уравнений движения относительно преобразования

$$t \rightarrow -t, \quad \dot{z} \rightarrow -\dot{z} \quad (19)$$

Заметим, что левая часть уравнения (17) удовлетворяет этому требованию. Следовательно, остается потребовать выполнения условий (19) для модельного потенциала  $U$ . В настоящей работе в качестве базовой функции, удовлетворяющей условию симметрии и условию (19), выбрана гауссова экспонента.

Следует отметить, что уравнение движения (17), а также уравнение (18) с правой частью, удовлетворяющей условию (19), описывают незамкнутую систему с накачкой или диссипацией энергии, допускающую обратимость процесса.

В качестве модельного потенциала выбрана потенциальная яма, скоординированная из суммы двух гауссовых экспонент

$$U(z, t) = \frac{1}{2} \cdot [ A \cdot e^{-\lambda_1^2 \cdot (z - z_1 - c_1 \cdot t)^2} + B \cdot e^{-\lambda_2^2 \cdot (z - z_2 - c_2 \cdot t)^2} ], \quad (20)$$

где параметры  $A$  и  $B$  задают высоту стенок потенциальной ямы,  $\lambda_1, \lambda_2$  – обратные дисперсии,  $z_1, z_2$  – положение вершин экспонент в начальный момент времени,  $c_1, c_2$  – скорости смещения вершин, определяющие угол схождения треугольника. Поскольку  $c_1, c_2$  имеют смысл скорости, то при преобразовании (19) их знаки должны быть изменены и требование инвариантности выполняется.

Применяя преобразование (4) к уравнению (20), получим выражение для модельного потенциала в переменных  $x$  и  $t$

$$U(x, t) = \frac{1}{2} \cdot [ A \cdot (\varphi_1)^{-\lambda_1^2 \cdot \ln \varphi_1} + B \cdot (\varphi_2)^{-\lambda_2^2 \cdot \ln \varphi_2} ], \quad (21)$$

где введены обозначения  $\varphi_1 = \frac{x}{x_0} \cdot e^{\frac{c_1 \cdot t}{x_0}}$ , и  $\varphi_2$  аналогичное  $\varphi_1$ .

Дифференциальное уравнение (18) с начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = b$  и потенциалом в форме (21) решалось численно методом Рунге-Кутты. Параметры  $A, B, \lambda_1, \lambda_2, x_1, x_2, c_1, c_2$  и начальные условия могут быть найдены методом наименьших квадратов.

В качестве моделируемого временного ряда были выбраны котировки Close недельного графика на интервале с 1989 г. до 1994 г. Были найдены следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} A &= 0.15, & B &= 0.15, \\ \lambda_1 &= 8, & \lambda_2 &= 40, \\ x_1 &= 2.25, & x_2 &= 1.5, \\ c_1 &= -0.05, & c_2 &= -0.012, \\ a &= 1.94, & b &= 0.164. \end{aligned}$$

При этих значениях потенциал  $U$  в начальный момент времени  $t = 1989$  имеет форму, показанную на рисунке 2.

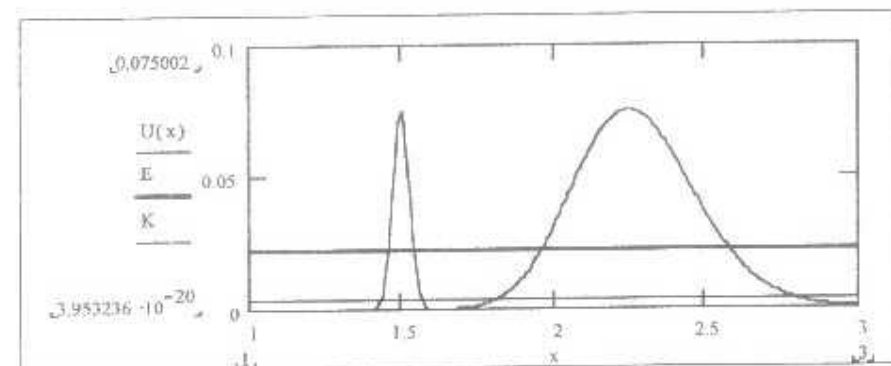


Рис. 2. График модельного потенциала в начальный момент времени.  $E$  – полная,  $K$  – кинетическая энергия в начальный момент времени.

На рисунке 3 показан расчетный график котировок. На интервале с 1989 г. до середины 1993 г. было проведено интерполирование, т.е. по численным данным реального ряда котировок (см. рис. 1) был восстановлен модельный потенциал в форме (21) и рассчитана траектория. На интервале с середины 1993 до середины 1996 г. было проведено экстраполирование, как расчет траектории в найденном модельном поле.

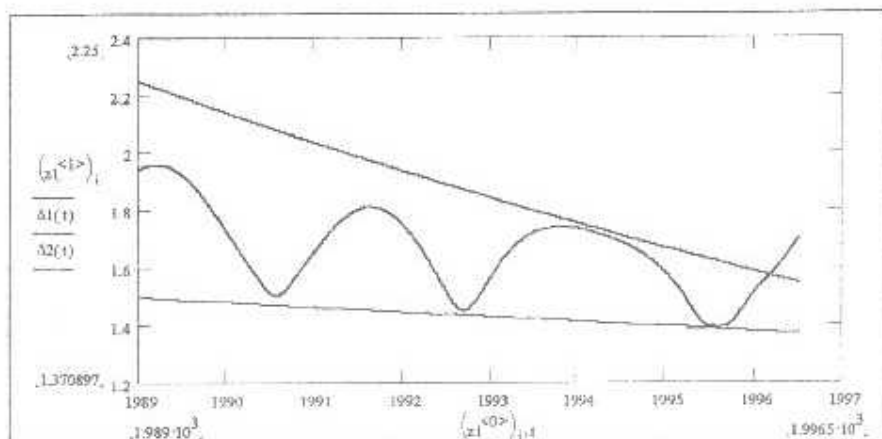


Рис. 3. Расчетный график недельных котировок доллар/марка. Монотонными линиями обозначены вершины потенциальных барьеров, которые, разумеется, не совпадают с образующими треугольника на рис. 1, построенного по правилам, принятым в техническом анализе

Сравнивая расчетный график с рисунком 1, можно сказать, что в первом приближении получен неплохой прогноз динамики котировок и предсказан прорыв верхней образующей треугольника, аналогичный реально наблюдавшемуся.

Полученное решение может быть уточнено путем отыскания поправок к потенциалу  $U$ . Поскольку потенциал входит в уравнение (21) линейно, постановка задачи о поправках аналогична рассмотренной и не представляет затруднений.

#### 6. Обсуждение результатов

В настоящей работе предложен феноменологический подход к задаче интерполирования и экстраполирования временных рядов биржевых котировок на основе аналогии с классической механикой материальной точки. Поставленная здесь задача о восстановлении потенциала — попытка количественного анализа событий, под воздействием которых происходит изменение котировок. Найденный модельный потенциал  $U(x, t)$  есть математический образ этих событий в первом приближении. С такой точки зрения динамика котировок в треугольнике подобна движению частицы в потенциальной яме со сдвигающимися стенками. Такое движение сопровождается ростом кинетической энергии частицы. Этим объясняется резкий пробой образующей треугольника, происшедший в тот момент, когда величина кинетической энергии превысит высоту потенциального барьера.

Простейшим примером, иллюстрирующим предлагаемый подход, является движение частицы между двумя сдвигающимися абсолютно упругими стенками. В этом случае образующие треугольника совпадают с принятыми в графическом анализе. Далее, следуя принятой в техническом анализе терминологии, назовем периодом  $T_n$   $n$ -го цикла расстояние между двумя соседними минимумами, а

амплитудой  $A_n$   $n$ -го цикла — расстояние от нижней образующей до точки верхнего разворота. Можно написать рекуррентные соотношения, связывающие отношение периодов соседних циклов с отношением их амплитуд и скоростью сближения стенок  $V$ :

$$\eta_n = \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{1 + 2 \cdot (n-1) \cdot V}{1 + 2 \cdot (n+1) \cdot V}, \quad (22)$$

$$\alpha_n = \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{1 + (2 \cdot n - 1) \cdot V}{1 + (2 \cdot n + 1) \cdot V}, \quad (23)$$

$$\eta_n = \frac{3 \cdot \alpha_n - 1}{3 - \alpha_n}. \quad (24)$$

При выводе соотношений (22)–(24) начальная скорость материальной точки принята равной 1, за начальную координату точки принята координата нижней стенки (образующей) в начальный момент времени.

Из приведенных соотношений видно, что при всех  $n$  и положительных  $V$  верно следующее:

$$0 < \eta_n < 1 \text{ и } 1/3 < \alpha_n < 1. \quad (25)$$

Таким образом, приведенные выше рекуррентные соотношения задают последовательность убывающих периодов и амплитуд. С точки зрения предлагаемого подхода грубое нарушение этой последовательности является сигналом об изменении состояния рынка и предстоящим скорым прорывом одной из образующих треугольника. Так, например, на рисунках 1 и 3 перед прорывом верхней образующей практически совпали амплитуды второго и третьего циклов, а период третьего цикла примерно в полтора раза вырос по сравнению со вторым.

Автор искренне благодарен Ю.В. Захарову за обсуждения постановки задачи и полученных результатов, и постоянное внимание к работе, Р.Г. Хлебопосу, В.Г. Суховельскому и М.Ю. Захарову за полезное обсуждение результатов, руководителю дилингового центра «Парекс» банку Н. Серикову за предоставленные базы данных, помощь в освоении технического анализа и полезные консультации.

#### Литература

1. Murphy J. Technical Analysis of the Futures Markets. — N.Y., 1986.
2. Демарк Т. Технический анализ — новая наука. — М.: Диаграмма, 1997.
3. Эрлих А.А. Технический анализ товарных и финансовых рынков. — М.: Инфра-М, 1996.
4. Müller U., Ducorogna M., Pictel O. Heavy tails in high-frequency financial data, in R. Adler, R. Feldman, M.S. Taqqu (eds), A Practical Guide to Heavy Tails, Birkhauser, 1997.
5. Black F., Sholes M. The pricing of options and corporate liabilities // J. of Political Economy. — 1973 — V. 81, No. 3. — P. 637-653.



6. *Merton R.C.* Theory of rational option pricing // *Bell J. of Economics and Management Science*. – 1973. – P. 141 – 183.
7. *Abarbanel H., Brown R., Kadtke B.* Predicting in nonlinear systems: methods for time series with broadband Fourier spectra // *Phys. Rev. A*. – 1990. – V. 41. No 4. – P. 1782-1807.
8. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence, in D.Rand and L.Young (eds), *Dynamical systems and turbulence*, Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 898, P. 366-381.
9. *Brock W., Dechert W., Scheinkman J.* A test for independence based on the correlation dimension, SSRI Working Paper, Department of Economics, University of Wisconsin, Madison. – 1987. – 8762. – P. 1-16.
10. *Hsieh D.* Chaos and non-linear dynamics: Application to financial markets // *J. of Finance*. – 1991. – V. 46. – P. 1839-1877.
11. *Akgiray V.* Conditional heteroscedasticity in time series of stock returns: evidence and forecasts // *J. of Business*. – 1989. – V. 62, No. 1. – P. 55-80.
12. <http://www.tullett.com>
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика. – М.: Физматгиз, 1973.